

具有随机传感器和执行器故障的 T-S 模糊离散系统的可靠性控制^{*}

刘金良

(南京财经大学应用数学学院, 南京 210046)

摘要 讨论了一类含有随机传感器和执行器故障的 T-S 模糊离散系统可靠性控制问题. 每个传感器和执行器的故障都是随机出现的, 它失真的概率用两个不相关的满足一定概率分布的随机变量来表示. 其中, 随机传感器和执行器故障用两个不相关的随机矩阵来表示, 基于随机传感器和执行器故障建立新的数学模型, 运用李亚普诺夫泛函理论和线性矩阵不等式技术设计其可靠性控制器, 最后通过仿真验证所提方法的有效性.

关键词 可靠性控制, 模糊系统, 概率性失真, 离散系统.

MR(2000) 主题分类号 93B36

RELIABLE CONTROL FOR T-S FUZZY DISCRETE SYSTEM WITH STOCHASTIC SENSORS AND ACTUATORS FAULTS

LIU Jinliang

(Department of Applied Mathematics, Nanjing University of Finance and Economics, Nanjing 210046)

Abstract This paper considers the reliable control design for T-S fuzzy discrete system with stochastic sensors and actuators faults. The faults of each sensor or actuator occurs randomly and its failure rates are governed by two sets of unrelated random variables satisfying certain probabilistic distribution. In terms of the probabilistic failures of every sensor or actuator, new fault model is proposed. Based on the new fault model, reliable controller is designed and sufficient conditions for the exponentially mean square stability of T-S fuzzy systems are derived by using Lyapunov functional method and linear matrix inequality (LMI) technique. Finally, a numerical example is given to show the effectiveness of the proposed method.

Key words Reliable control, fuzzy system, probabilistic failures, discrete-time system.

* 国家自然科学基金 (11226240, 61074025, 60774060, 60834002), 江苏省自然科学基金 - 青年基金 (BK2012469), 江苏省省属高校自然科学基金 (12KJD120001), 江苏高校优势学科建设工程资助项目资助课题.

收稿日期: 2012-02-14, 收到修改稿日期: 2012-05-23.

1 引 言

自从 Takagi 和 Sugeno^[1] 在 1985 年提出 T-S 模糊控制模型以来，该理论得到了快速的发展，是目前模糊控制领域最活跃的一个分支。T-S 模糊系统本质在于把一个非线性系统的模型看成多个局部线性模型的模糊逼近，如果选取足够多的模糊规则，那么从理论上说，T-S 模糊模型可以达到任意精度。因此 T-S 模糊模型是非线性不确定系统建模的一个重要工具，已广泛应用于故障检测、决策支持及智能控制等领域。在现实中，带有时滞的非线性动力系统广泛应用于工业和工程实际中，如轧机系统，化学过程，通信网络。众所周知，T-S 模糊系统代表了一类非线性动力系统（包括时滞依赖的系统），因此，我们可以通过研究相关的 T-S 模糊模型，来研究带有时滞的非线性系统。目前，关于 T-S 模糊系统已经取得了一些很好的结果，这些结果可以分为两类，即时滞无关的 T-S 模糊系统和时滞依赖的 T-S 模糊系统。一般情况下，时滞依赖的 T-S 模糊系统比时滞无关的 T-S 模糊系统具有更小的保守性，特别是时滞很小的情况下。

近年来，对时滞相关的 T-S 模糊系统的稳定性研究取得了丰硕的成果，并得到了很多有价值的结果。如文献 [2] 研究了常时滞的系统，文献 [3] 研究了时变系统。上述结果的获得大都是假设所有传感器、控制元件、系统的执行器具有良好的工作条件。但是众所周知，由于传感器或执行器的老化，零点漂移，电磁干扰，网络扰动等，传感器故障，执行器故障，数据失真不可避免，这样将可能严重影响系统性能^[4]。近来，许多学者对可靠性控制设计进行了深入的研究，见文献 [5-8]。上述文献用静态方法给出系统故障模型，并且大多数只考虑了执行器故障的情况^[5,6]，少数考虑了带有传感器故障的可靠控制问题^[7,8]。文献 [9] 对一类具有随机传感器和执行器故障的网络控制系统的可靠性控制进行了研究，通过使用李亚普诺夫泛函方法和矩阵不等式技术得到了目标网络控制系统镇定的充分性判据。然而，到目前为止，带有概率传感器故障和执行器故障的 T-S 模糊离散系统还没有被广泛地研究，这是一个值得研究的具有挑战性的课题，越来越受到人们的关注，其中，稳定性分析和控制器设计是重中之重。近年来，许多学者对这些进行了研究，并取得了大量成果。文献 [10] 研究了一类 T-S 模糊时滞系统，得到了该类系统具有较小保守性的时滞相关的稳定性的充分性条件。文献 [11] 讨论了一类 T-S 模糊时滞系统，通过构造一个新的模糊 Lyapunov 泛函，提出了该类系统稳定性的充分性条件和滤波器存在可行解的充分性条件。

本文考虑了一类带有随机传感器和执行器故障的 T-S 模糊系统的可靠性控制问题。这里，用两个不相关的满足一定概率分布的随机变量来表示每个传感器和执行器的故障的发生。通过考虑概率传感器和执行器故障，建立了一个新的系统模型。基于随机传感器和执行器故障建立新的数学模型，设计该系统的可靠性控制器，并且利用 Lyapunov 稳定性相关理论和随机微分方程等知识得到了该类系统稳定的充分性判据。最后通过一个实际例子验证了本方法的有效性。

2 问题描述

考虑下面的 T-S 模糊离散系统

$$x(k+1) = \sum_{i=1}^r h_i(k) [A_i x(k) + B_i u(k)], \quad (1)$$

其中 A_i, B_i 为已知的具有合适维数的矩阵, $x(k) \in \mathbb{R}^n, u(k) \in \mathbb{R}^m$ 为系统状态和控制输入, $i \in \{1, 2, \dots, r\} \triangleq \mathbb{S}$, r 是模糊规则的个数, 并且有

$$h_i(\theta(k)) = \frac{\omega_i(\theta(k))}{\sum_{i=1}^r \omega_i(\theta(k))}, \quad \omega_i(\theta(k)) = \prod_{j=1}^g W_j^i(\theta_j(k)),$$

$W_j^i(\theta_j(k))$ 为 $\theta_j(k)$ 属于 W_j^i 的隶属度并且 $h_i(\theta(t))$ 满足

$$h_i(\theta(k)) \geq 0, \quad \sum_{i=1}^r h_i(\theta(k)) = 1.$$

为了表达简便, 在下面叙述中我们用 h_i 表示 $h_i(\theta(k))$.

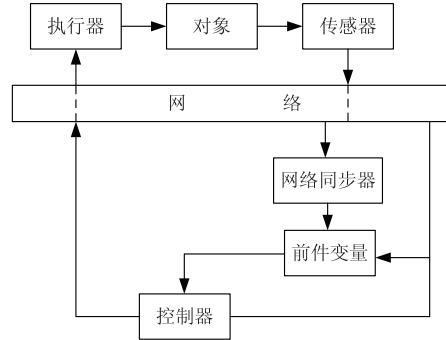


图 1 系统 (1) 的结构框架

本文假定传感器是时间驱动, 控制器和执行器是事件驱动. 我们使用图 1 描述系统框架. 其中“网络同步器”是用来确定系统 (1) 的前件变量. 由于网络的存在, 在控制器的模糊规则里的前件变量为 $\theta(k - d_k)$, 其中 $d_1 \leq d_k \leq d_2$ 是网络时滞. 当使用 PDC 控制规则时, 如果前件变量为 $\theta(k - d_k)$, 则在后面的模型分析中会出现一些问题, 例如在获得结论中不同的隶属度函数表达. 为了避免这些问题, 我们提出一种对前件变量进行再分析和重构的方法.

由上面的假定, 当初始条件给定时, 系统状态根据系统方程 (1) 我们就可以知道, 而 d_k 可以根据系统框架里面的网络同步器获知, 于是由系统方程 (1) 我们就可以获知 $x(k - d_k)$. 基于上面的分析, 图 1 中的前件变量我们就可以获得.

当不考虑不可靠通讯通道时, 也就是只考虑从传感器到控制器和从控制器到执行器之间的网络时延时, 由上面的分析我们可以自然得到第 i^{th} 个控制器规则为

$$\begin{aligned} R^i : & \quad \text{If } \theta_1(k - d_k) \text{ is } W_1^i \text{ and, } \dots, \text{ If } \theta_g(k - d_k) \text{ is } W_g^i \\ & \quad \text{Then } u(k) = K_j x(k - d_k). \end{aligned} \quad (2)$$

控制器 (2) 经过清晰化后的模型为

$$u(k) = \sum_{j=1}^r h_j(\theta(k)) K_j x(k - d_k). \quad (3)$$

当考虑从控制器到执行器的不可靠通道时, 系统 (1) 可以表示为

$$u(k) = \sum_{j=1}^r h_j \Xi_1 K_j x(k - d_k), \quad (4)$$

其中 $\Xi_1 = \text{diag}\{\Xi_{11}, \Xi_{12}, \dots, \Xi_{1m}\}$, 而 $\Xi_{1i}(i = 1, 2, \dots, m)$ 是 m 个不相关的取值在 $[0, \rho_1]$ 上的随机变量, 并且 $\rho_1 \geq 1$, $\Xi_{1i}(i = 1, 2, \dots, m)$ 的数学期望和方差分别为 α_i 和 δ_i^2 .

基于 (4) 式, 如果我们进一步考虑从传感器到控制器的不可靠通道, (4) 式可以进一步的表述为

$$u(k) = \sum_{j=1}^r h_j \Xi_1 K_j \Xi_2 x(k - d_k), \quad (5)$$

其中 $\Xi_2 = \text{diag}\{\Xi_{21}, \Xi_{22}, \dots, \Xi_{2n}\}$ 而 $\Xi_{2j}(j = 1, 2, \dots, n)$ 是 n 个不相关的取值在 $[0, \rho_2]$ 上的随机变量, 并且 $\rho_2 \geq 1$, 并且其与 $\Xi_{1i}(i = 1, 2, \dots, m)$ 也是不相关的. $\Xi_{2j}(j = 1, 2, \dots, n)$ 的数学期望和方差分别为 β_j 和 γ_j^2 .

注 1 在文献 [12–14] 中, 用取值 {0, 1} 上的随机变量 Γ_k 来表示传感器或控制器完全失效或者完好. 在文献 [13, 14] 中, 作者假定随机变量 Γ_k 取值在 [0, 1] 上, 当 $0 \leq \Gamma_k \leq 1$ 意味着传感器或控制器部分失效. 在本节里面, 我们假定随机变量 Ξ_{1i} 和 Ξ_{2i} 属于区间 $[0, \rho_1]$ 和 $[0, \rho_2]$, 而 $\rho_1 \geq 1$, $\rho_2 \geq 1$. $\Xi_{2j} = 0$, 这意味着第 j 个执行器完全失效或者在从传感器到控制器的传输中丢包. $\Xi_{2j} = 1$, 这意味着第 j 个传感器是完好的. 在这里, 我们提出的随机变量与文献 [12–14] 中的区别是我们也考虑了传感器和控制器的数据失真问题, 我们知道当传感器和执行器发生故障时, 输出信号可能会变的很大或者很小. 在这里我们用 $0 < \Xi_{1i} < 1$, $0 < \Xi_{2j} < 1$ 和 $\Xi_{1i} > 1$, $\Xi_{2j} > 1$ 来表示数据失真.

把 (5) 式带入 (1) 式可以得到

$$\begin{aligned} & x(k+1) \\ &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i h_j [A_i x(k) + B_i \Xi_1 K_j \Xi_2 x(k - d_k)] \\ &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i h_j [A_i x(k) + B_i \bar{\Xi}_1 K_j \bar{\Xi}_2 x(k - d_k) + B_i (\Xi_1 - \bar{\Xi}_1) K_j (\Xi_2 - \bar{\Xi}_2) x(k - d_k) \\ &\quad + B_i \bar{\Xi}_1 K_j (\Xi_2 - \bar{\Xi}_2) x(k - d_k) + B_i (\Xi_1 - \bar{\Xi}_1) K_j \bar{\Xi}_2 x(k - d_k)], \end{aligned} \quad (6)$$

其中

$$\begin{aligned} \bar{\Xi}_1 &= \text{diag}\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\} = \sum_{i=1}^m \alpha_i \Theta_1^i, \quad \bar{\Xi}_2 = \text{diag}\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\} = \sum_{j=1}^n \beta_j \Theta_2^j, \\ \Theta_1^i &= \text{diag}\{0, 0, \dots, 0, \underbrace{1, 0, 0, \dots, 0}_{m-i}\}, \quad \Theta_2^j = \text{diag}\{0, 0, \dots, 0, \underbrace{1, 0, 0, \dots, 0}_{n-j}\}. \end{aligned}$$

由上面的讨论，我们可以知道

$$\mathcal{E}\left\{\left(\Xi_1 - \bar{\Xi}_1\right)^2\right\} = \text{diag}\{\delta_1^2, \delta_2^2, \dots, \delta_m^2\}, \quad \mathcal{E}\left\{\left(\Xi_2 - \bar{\Xi}_2\right)^2\right\} = \text{diag}\{\gamma_1^2, \gamma_2^2, \dots, \gamma_n^2\}. \quad (7)$$

叙述要处理的问题之前，首先给出如下引理。

引理 1^[15] 对给定的矩阵 $Q > 0$ 和函数 $d_k, x(k), y(k)$ ($k = 1, 2, \dots$), 其中 $y(k) = x(k+1) - x(k)$, 则有下面不等式成立

$$-d_k \sum_{i=k-d_k}^{k-1} y^T(i) Q y(i) \leq \begin{bmatrix} x(k) \\ x(k-d_k) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -Q & Q \\ Q & -Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ x(k-d_k) \end{bmatrix}. \quad (8)$$

引理 2^[16] 对任意的向量 $x, y \in \mathbb{R}^n$ 和正定对称矩阵 $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 下面不等式成立

$$2x^T y \leq x^T Q x + y^T Q^{-1} y. \quad (9)$$

引理 3^[17] Ω_1, Ω_2 和 Ω 是具有合适维数的已知矩阵, 对 $d_k \in [d_1, d_2]$,

$$(d_k - d_1)\Omega_1 + (d_2 - d_k)\Omega_2 + \Omega < 0 \quad (10)$$

成立当且仅当下面两式成立

$$(d_2 - d_1)\Omega_1 + \Omega < 0, \quad (11)$$

$$(d_2 - d_1)\Omega_2 + \Omega < 0. \quad (12)$$

3 主要结果

基于上面的准备知识, 下面我们将对系统 (6) 设计模糊可靠性控制器 (5). 其中定理 1 给出系统 (6) 稳定性的充分性条件. 定理 2 将在定理 1 的基础上设计系统 (1) 的模糊可靠性控制器 (5).

定理 1 对给定的模糊可靠性控制器增益 K_j , 系统 (6) 指数均方随机稳定, 如果存在正定对称矩阵 $P > 0, Q_1 > 0, Q_2 > 0, R_1 > 0, R_2 > 0$ 和具有适当维数的矩阵 N_{ij} 和 M_{ij} ($i, j \in \mathbb{S}$), 使得当 $i, j = 1, 2, \dots, r$ 和 $1 \leq i \leq j \leq r$ 时有下列不等式成立

$$\Psi_1(i, j) + \Psi_1(j, i) < 0, \quad (13)$$

$$\Psi_2(i, j) + \Psi_2(j, i) < 0, \quad (14)$$

其中

$$\Psi_1(i, j) = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & \sqrt{d_{21}}N_{ij} & \Psi_{13}(i, j) & \Psi_{14} \\ * & -R_2 & 0 & 0 \\ * & * & -\tilde{R} & 0 \\ * & * & * & \Psi_{44} \end{bmatrix}, \quad \Psi_2(i, j) = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & \sqrt{d_{21}}M_{ij} & \Psi_{13}(i, j) & \Psi_{14} \\ * & -R_2 & 0 & 0 \\ * & * & -\tilde{R} & 0 \\ * & * & * & \Psi_{44} \end{bmatrix},$$

$$\Sigma_1 = \Psi_{11}(i, j) + \Gamma(i, j) + \Gamma^T(i, j), \quad \Gamma(i, j) = [0 \quad N_{ij} \quad -N_{ij} + M_{ij} \quad -M_{ij}],$$

$$\Psi_{11}(i, j) = \begin{bmatrix} \Upsilon_1(i, j) & R_1 & PB_i\bar{\Xi}_1K_j\bar{\Xi}_2 & 0 \\ * & -Q_1 - R_1 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & -Q_2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}\Psi_{13}(i, j) &= [\tilde{R}(A_i - I) \quad 0 \quad \tilde{R}B_i\bar{\Xi}_1K_j\bar{\Xi}_2 \quad 0]^T, \quad \Psi_{14} = [A_1 \quad A_2 \quad \cdots \quad A_n], \\ A_l &= [A_{l1}^T \quad A_{l2}^T \quad \cdots \quad A_{lm}^T], \quad l = 1, 2, \dots, n, \quad \varpi_{ls} = \alpha_l\gamma_s^2 + \delta_l^2\beta_s + \delta_l^2\gamma_s^2, \\ A_{ls} &= \sqrt{\varpi_{ls}}[0 \quad 0 \quad \tilde{R}B_i\Theta_1^lK_j\Theta_2^s \quad 0], \quad s = 1, 2, \dots, m, \quad \Psi_{44} = \text{diag}\{\underbrace{-\tilde{R}, -\tilde{R}, \dots, -\tilde{R}}_{m*n}\}, \\ \Upsilon_1(i, j) &= PA_i + A_i^T P - 2P + Q_1 + Q_2 - R_1, \quad \tilde{R} = P + d_1^2R_1 + d_{21}R_2, \quad d_{21} = d_2 - d_1.\end{aligned}$$

证 定义

$$y(k) = x(k+1) - x(k). \quad (15)$$

构造如下李亚普诺夫泛函

$$\begin{aligned}V(k) &= x^T(k)Px(k) + \sum_{i=k-d_1}^{k-1} x^T(i)Q_1x(i) + \sum_{i=k-d_2}^{k-1} x^T(i)Q_2x(i) \\ &\quad + d_1 \sum_{i=-d_1}^{-1} \sum_{j=k+i}^{k-1} y^T(j)R_1y(j) + \sum_{i=-d_2}^{-d_1-1} \sum_{j=k+i}^{k-1} y^T(j)R_2y(j).\end{aligned} \quad (16)$$

由无穷小算子的定义, 对 $V(k)$ 前向积分得

$$\begin{aligned}\mathcal{E}\{\mathcal{L}V(k)\} &= \mathcal{E}\left\{2x^T(k)Py(k) + y^T(k)Py(k) + x^T(k)(Q_1 + Q_2)x(k) - \sum_{i=1}^2 x^T(k-d_i)Q_ix(k-d_i)\right. \\ &\quad \left.- d_1 \sum_{i=k-d_1}^{k-1} y^T(i)R_1y(i) + y^T(k)(d_1^2R_1 + d_{21}R_2)y(k) - \sum_{i=k-d_2}^{k-d_1-1} y^T(i)R_2y(i)\right\}, \quad (17)\end{aligned}$$

由引理 1, 我们有

$$-d_1 \sum_{i=k-d_1}^{k-1} y^T(i)R_1y(i) \leq \begin{bmatrix} x(k) \\ x(k-d_1) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -R_1 & R_1 \\ R_1 & -R_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ x(k-d_1) \end{bmatrix}. \quad (18)$$

结合 (17) 式和 (18) 式并引入自由权矩阵 M_{ij}, N_{ij} ($i, j \in \mathbb{S}$), 我们可以得到

$$\begin{aligned}\mathcal{E}\{\mathcal{L}V(k)\} &= \mathcal{E}\left\{2x^T(k)Py(k) + y^T(k)Py(k) + x^T(k)(Q_1 + Q_2)x(k) - \sum_{i=1}^2 x^T(k-d_i)Q_ix(k-d_i)\right. \\ &\quad \left.+ d_1^2y^T(k)R_1y(k) + \begin{bmatrix} x(k) \\ x(k-d_1) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -R_1 & R_1 \\ R_1 & -R_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ x(k-d_1) \end{bmatrix} + d_{21}y^T(k)R_2y(k)\right. \\ &\quad \left.- \sum_{i=k-d_2}^{k-d_1-1} y^T(i)R_2y(i) + \Pi_1 + \Pi_2\right\}, \quad (19)\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}\Pi_1 &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i h_j \left\{ 2\xi^T(k) N_{ij} \left[x(k-d_1) - x(k-d_k) - \sum_{k=d_k}^{k-d_1-1} y(i) \right] \right\} = 0, \\ \Pi_2 &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i h_j \left\{ 2\xi^T(k) M_{ij} \left[x(k-d_k) - x(k-d_2) - \sum_{k=d_2}^{k-d_k-1} y(i) \right] \right\} = 0.\end{aligned}$$

而 N_{ij}, M_{ij} 是具有合适维数的矩阵，并且

$$\xi^T(k) = [x^T(k) \quad x^T(k-d_1) \quad x^T(k-d_k) \quad x^T(k-d_2)].$$

由引理 2，我们可得

$$-2\xi^T(k) N_{ij} \sum_{k=d_k}^{k-d_1-1} y(i) \leq (d_k - d_1) \xi^T(k) N_{ij} R_2^{-1} N_{ij}^T \xi(k) + \sum_{i=k-d_k}^{k-d_1-1} y^T(i) R_2 y(i), \quad (20)$$

$$-2\xi^T(k) M_{ij} \sum_{k=d_2}^{k-d_k-1} y(i) \leq (d_2 - d_k) \xi^T(k) M_{ij} R_2^{-1} M_{ij}^T \xi(k) + \sum_{i=k-d_2}^{k-d_k-1} y^T(i) R_2 y(i). \quad (21)$$

注意到

$$\begin{aligned}&y^T(k) \tilde{R} y(k) \\ &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i h_j \left\{ x^T(k-d_k) [B_i \bar{\Xi}_1 K_j (\Xi_2 - \bar{\Xi}_2)]^T \tilde{R} [B_i \bar{\Xi}_1 K_j (\Xi_2 - \bar{\Xi}_2)] x(k-d_k) \right. \\ &\quad + x^T(k-d_k) [B_i (\Xi_1 - \bar{\Xi}_1) K_j (\Xi_2 - \bar{\Xi}_2)]^T \\ &\quad \cdot \bar{R} [B_i (\Xi_1 - \bar{\Xi}_1) K_j (\Xi_2 - \bar{\Xi}_2)] x(k-d_k) \\ &\quad + x^T(k-d_k) [B_i (\Xi_1 - \bar{\Xi}_1) K_j \bar{\Xi}_2]^T \tilde{R} [B_i (\Xi_1 - \bar{\Xi}_1) K_j \bar{\Xi}_2] x(k-d_k) \\ &\quad + [(A_i - I)x(k) + B_i \bar{\Xi}_1 K_j \bar{\Xi}_2 x(k-d_k)]^T \\ &\quad \cdot \tilde{R} [(A_i - I)x(k) + B_i \bar{\Xi}_1 K_j \bar{\Xi}_2 x(k-d_k)] \left. \right\}. \quad (22)\end{aligned}$$

并且

$$\begin{aligned}&\mathcal{E} \left\{ x^T(k-d_k) [B_i \bar{\Xi}_1 K_j (\Xi_2 - \bar{\Xi}_2)]^T \tilde{R} [B_i \bar{\Xi}_1 K_j (\Xi_2 - \bar{\Xi}_2)] x(k-d_k) \right\} \\ &= \sum_{l=1}^m \sum_{s=1}^n \alpha_l \gamma_s^2 x^T(k-d_k) (B_i \Theta_1^l K_j \Theta_2^s)^T \tilde{R} (B_i \Theta_1^l K_j \Theta_2^s) x(k-d_k), \quad (23)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\mathcal{E} \left\{ x^T(k-d_k) [B_i (\Xi_1 - \bar{\Xi}_1) K_j \bar{\Xi}_2]^T \tilde{R} [B_i (\Xi_1 - \bar{\Xi}_1) K_j \bar{\Xi}_2] x(k-d_k) \right\} \\ &= \sum_{l=1}^m \sum_{s=1}^n \delta_l^2 \beta_s x^T(k-d_k) (B_i \Theta_1^l K_j \Theta_2^s)^T \tilde{R} (B_i \Theta_1^l K_j \Theta_2^s) x(k-d_k), \quad (24)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\mathcal{E} \left\{ x^T(k-d_k) [B_i (\Xi_1 - \bar{\Xi}_1) K_j (\Xi_2 - \bar{\Xi}_2)]^T \tilde{R} [B_i (\Xi_1 - \bar{\Xi}_1) K_j (\Xi_2 - \bar{\Xi}_2)] x(k-d_k) \right\} \\ &= \sum_{l=1}^m \sum_{s=1}^n \delta_l^2 \gamma_s^2 x^T(k-d_k) (B_i \Theta_1^l K_j \Theta_2^s)^T \tilde{R} (B_i \Theta_1^l K_j \Theta_2^s) x(k-d_k). \quad (25)\end{aligned}$$

结合式(22)–(25), 我们可以得到

$$\begin{aligned} & \mathcal{E}\{\mathcal{L}V(k)\} \\ &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i h_j \left\{ \xi^T(k) [\Psi_{13} \tilde{R}^{-1} \Psi_{13}^T + (d_k - d_1) N_{ij} R_2^{-1} N_{ij}^T + (d_2 - d_k) M_{ij} R_2^{-1} M_{ij}^T] \xi(k) \right. \\ &\quad + \xi^T(k) (\Psi_{11} + \Gamma + \Gamma^T) \xi(k) \\ &\quad \left. + \sum_{l=1}^m \sum_{s=1}^n \varpi_{ls} x^T(k - d_k) (B_i \Theta_1^l K_j \Theta_2^s)^T \tilde{R} (B_i \Theta_1^l K_j \Theta_2^s) x(k - d_k) \right\}, \end{aligned} \quad (26)$$

其中 $\varpi_{ls} = \alpha_l \gamma_s^2 + \delta_l^2 \beta_s + \delta_l^2 \gamma_s^2$. 将式(20), (21) 和 (26) 代入式(19), 我们可以得到

$$\begin{aligned} & \mathcal{E}\{\mathcal{L}V(k)\} \\ &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i h_j \left\{ \xi^T(k) [\Psi_{13} \tilde{R}^{-1} \Psi_{13}^T + (d_k - d_1) N_{ij} R_2^{-1} N_{ij}^T + (d_2 - d_k) M_{ij} R_2^{-1} M_{ij}^T] \xi(k) \right. \\ &\quad + \xi^T(k) (\Psi_{11} + \Gamma + \Gamma^T) \xi(k) \\ &\quad \left. + \sum_{l=1}^m \sum_{s=1}^n \varpi_{ls} x^T(k - d_k) (B_i \Theta_1^l K_j \Theta_2^s)^T \tilde{R} (B_i \Theta_1^l K_j \Theta_2^s) x(k - d_k) \right\}, \end{aligned} \quad (27)$$

然后再由式(13), (14) 和引理 3, 我们可以得到

$$\mathcal{E}\{\mathcal{L}V(k)\} < 0. \quad (28)$$

于是类似文献[10]中的证明方法, 我们可以由式(28)知道闭环系统(6)指数均方随机稳定.

选择一个使得 $\sum_{i=1}^n (\beta_i - \beta)$ 最小的常数 β , 系统(1)的可靠性控制器(5)可以由下面定理获得.

定理 2 对给定的一些常数 d_1, d_2, ρ_1 和 ρ_2 , 如果存在正定对称矩阵 $X > 0, \hat{Q}_1 > 0, \hat{Q}_2 > 0$ 和具有适当维数的矩阵 $\hat{N}_{ij}, \hat{M}_{ij}$ ($i, j \in \mathbb{S}$), 使得对 $i, j = 1, 2, \dots, r, 1 \leq i \leq j \leq r$ 有 LMIs (29) 和 (30) 成立, 则闭环系统(6)是指数均方随机稳定, 且可靠控制器增益 $K_j = Y_j X^{-1}$.

$$\hat{\Psi}_1(i, j) + \hat{\Psi}_1(j, i) < 0, \quad (29)$$

$$\hat{\Psi}_2(i, j) + \hat{\Psi}_2(j, i) < 0, \quad (30)$$

其中

$$\hat{\Psi}_1(i, j) = \begin{bmatrix} Y & \sqrt{d_{21}} \hat{N}_{ij} & \Psi_{13}(i, j) & \hat{\Psi}_{14}(i, j) & 0 & 0 & \hat{\Psi}_{17} \\ * & -\rho_2 X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -\rho X & \hat{\Psi}_{34}(i, j) & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & \hat{\Psi}_{44} & 0 & \hat{\Psi}_{46} & 0 \\ * & * & * & * & \hat{\Psi}_{55} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & \hat{\Psi}_{66} & 0 \\ * & * & * & * & * & * & \hat{\Psi}_{77} \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}\widehat{\Psi}_{17} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \Theta_2^1 & \Theta_2^2 & \cdots & \Theta_2^n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad \Upsilon = \widehat{\Psi}_{11}(i, j) + \widehat{\Gamma}(i, j) + \widehat{\Gamma}^T(i, j), \\ \Gamma_2(i, j) &= A_i X + X A_i^T - 2X + \widehat{Q}_1 + \widehat{Q}_2 - \rho_1 X, \\ \widehat{\Psi}_{11}(i, j) &= \begin{bmatrix} \Gamma_2(i, j) & \rho_1 X & \beta B_i \bar{\Xi}_1 Y_j & 0 \\ * & -\widehat{Q}_1 - \rho_1 X & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & -\widehat{Q}_2 \end{bmatrix}, \quad \widehat{\Psi}_{14}(i, j) = \begin{bmatrix} B_i \bar{\Xi}_1 Y_j & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \bar{\Xi}_2 - \beta I \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \widehat{\Gamma}(i, j) &= [0 \quad \widehat{N}_{ij} \quad -\widehat{N}_{ij} + \widehat{M}_{ij} \quad -\widehat{M}_{ij}], \quad \widehat{\Psi}_{13}(i, j) = [\rho A_i X - \rho X \quad 0 \quad \rho \beta B_i \bar{\Xi}_1 Y_j \quad 0]^T, \\ \widehat{\Psi}_{34}(i, j) &= [\rho B_i \bar{\Xi}_1 Y_j \quad 0], \quad \widehat{\Psi}_{44} = \text{diag}\{-X, -X\}, \quad \widehat{\Psi}_{55} = \text{diag}\{\underbrace{-\rho X, -\rho X, \dots, -\rho X}_{mn}\}, \\ \widehat{\Psi}_{46} &= [\widehat{\Lambda}_1 \quad \widehat{\Lambda}_2 \quad \cdots \quad \widehat{\Lambda}_n], \quad \widehat{\Lambda}_l^T = [0_{1 \times (l-1)m} \quad F_{ls} \quad 0_{1 \times (n-l)m}], \\ F_{ls} &= \rho \sqrt{\varpi_{ls}} [Y_j^T \Theta_1^1 B_i^T \quad \cdots \quad Y_j^T \Theta_1^m B_i^T], \quad \widehat{\Psi}_{66} = \widehat{\Psi}_{77} = \text{diag}\{-X, -X, \dots, -X\},\end{aligned}$$

而 $\widehat{\Psi}_2(i, j)$ 为将 $\widehat{\Psi}_1(i, j)$ 中 \widehat{N}_{ij} 替换为 \widehat{M}_{ij} , 其余的不变.

证 在式(13) 和 (14) 中用 $(\bar{\Xi}_2 - \beta I) + \beta I$ 代替 $\bar{\Xi}_2$, 并且定义 $X = P^{-1}$, $R_1 = \rho_1 P$, $R_2 = \rho_2 P$, 我们可得对 $k = 1, 2$, 有

$$\begin{aligned}\check{\Psi}'_k &+ \begin{bmatrix} PB_i \bar{\Xi}_1 K_j \\ 0_{4 \times 1} \\ \widetilde{R} B_i \bar{\Xi}_1 K_j \\ 0_{3mn \times 1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (\bar{\Xi}_2 - \beta I)^T \\ 0_{3(mn+1) \times 1} \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{\Xi}_2 - \beta I \\ 0_{3(mn+1) \times 1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} PB_i \bar{\Xi}_1 K_j \\ 0_{4 \times 1} \\ \widetilde{R} B_i \bar{\Xi}_1 K_j \\ 0_{3mn \times 1} \end{bmatrix}^T \\ &\leq \check{\Psi}'_k + \begin{bmatrix} PB_i \bar{\Xi}_1 K_j \\ 0_{4 \times 1} \\ \widetilde{R} B_i \bar{\Xi}_1 K_j \\ 0_{3mn \times 1} \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} PB_i \bar{\Xi}_1 K_j \\ 0_{4 \times 1} \\ \widetilde{R} B_i \bar{\Xi}_1 K_j \\ 0_{3mn \times 1} \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{\Xi}_2 - \beta I \\ 0_{3(mn+1) \times 1} \end{bmatrix} X^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{\Xi}_2 - \beta I \\ 0_{3(mn+1) \times 1} \end{bmatrix}^T, \quad (31)\end{aligned}$$

其中 $\check{\Psi}'_k(k = 1, 2)$ 为 $\Psi_k(k = 1, 2)$ 中把 $PB_i \bar{\Xi}_1 K_j \bar{\Xi}_2$, $\bar{\Xi}_2 K_j^T \bar{\Xi}_1 B_i^T P$, $\widetilde{R} B_i \bar{\Xi}_1 K_j \bar{\Xi}_2$, $\bar{\Xi}_2 K_j^T \bar{\Xi}_1$ 分别替换为 $\beta PB_i \bar{\Xi}_1 K_j \bar{\Xi}_2$, $\beta \bar{\Xi}_2 K_j^T \bar{\Xi}_1 B_i^T P$, $\beta \widetilde{R} B_i \bar{\Xi}_1 K_j \bar{\Xi}_2$, $\beta \bar{\Xi}_2 K_j^T \bar{\Xi}_1 B_i^T \widetilde{R}$.

而我们又有

$$\begin{aligned}\check{\Psi}''_k &+ \sum_{l=1}^n \left\{ \begin{bmatrix} 0_{(6+(l-1)m) \times 1} \\ \overline{F}_{ls} \\ 0_{(n-l)m \times 1} \end{bmatrix} [0 \quad 0 \quad \Theta_2^l \quad 0_{1 \times 3(mn+1)}] \right. \\ &\quad \left. + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Theta_2^l \\ 0_{3(mn+1) \times 1} \end{bmatrix} [0_{1 \times (6+(l-1)m)} \quad \overline{F}_{ls}^T \quad 0_{1 \times (n-l)m}] \right\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \check{\Psi}_k'' + \sum_{l=1}^n \left\{ \begin{bmatrix} 0_{(6+(l-1)m) \times 1} \\ \bar{F}_{ls} \\ 0_{(n-l)m \times 1} \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 0_{(6+(l-1)m) \times 1} \\ \bar{F}_{ls} \\ 0_{(n-l)m \times 1} \end{bmatrix}^T \right. \\ &\quad \left. + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \theta_2^l \\ 0_{3(mn+1) \times 1} \end{bmatrix} X^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \theta_2^l \\ 0_{3(mn+1) \times 1} \end{bmatrix}^T \right\}, \end{aligned} \quad (32)$$

其中 $\bar{F}_{ls} = \sqrt{\varpi_{ls}} \begin{bmatrix} (\tilde{R}B_i \theta_1^1 K_j)^T & (\tilde{R}B_i \theta_1^2 K_j)^T & \cdots & (\tilde{R}B_i \theta_1^m K_j)^T \end{bmatrix}^T$. 而 Ψ_k'' 为 Ψ_k' 中最后 mn 行和 mn 列中删除 $\tilde{R}B_i \theta_1^l K_j \theta_2^s$ 和其转置.

由式 (13), (14), (31) 和 (32) 并利用 Schur 补, 我们可以得到下面的不等式

$$\Omega_i < 0, \quad i = 1, 2, \quad (33)$$

其中

$$\Omega_1 = \begin{bmatrix} \Gamma & \sqrt{d_{21}} N_{ij} & \Psi_{13}(i, j) & \Pi_{14}(i, j) & 0 & 0 & \hat{\Psi}_{17} \\ * & -R_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -\tilde{R} & \Pi_{34}(i, j) & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & \Pi_{44} & 0 & \Pi_{46} & 0 \\ * & * & * & * & \Pi_{55} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & \Pi_{66} & 0 \\ * & * & * & * & * & * & \hat{\Psi}_{77} \end{bmatrix}, \quad \Pi_{14} = \begin{bmatrix} PB_i \bar{\Xi}_1 K_j & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \bar{\Xi}_2 - \beta I \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Gamma = \Pi_{11}(i, j) + \Gamma(i, j) + \Gamma^T(i, j), \quad \Pi_{34} = [\tilde{R}B_i \bar{\Xi}_1 K_j \quad 0], \quad \Pi_{44} = \text{diag}\{-P, -X\},$$

$$\Pi_{55} = \text{diag}\{\underbrace{-\tilde{R}, -\tilde{R}, \dots, -\tilde{R}}_{mn}\}, \quad \Pi_{46} = [\bar{A}_1 \quad \bar{A}_2 \quad \dots \quad \bar{A}_n], \quad \Pi_{66} = \text{diag}\{\underbrace{-P, -P, \dots, -P}_n\},$$

$$\bar{A}_l^T = [0_{1 \times (l-1)m} \quad \bar{F}_{ls} \quad 0_{1 \times (n-l)m}], \quad \bar{F}_{ls} = \rho \sqrt{\varpi_{ls}} [K_j^T \theta_1^1 B_i^T P \quad \dots \quad K_j^T \theta_1^m B_i^T P],$$

而 Ω_2 为 Ω_1 中将 N_{ij} 替换为 M_{ij} , $\Pi_{11}(i, j)$ 为 $\Psi_{11}(i, j)$ 中由 $PB_i \bar{\Xi}_1 K_j \bar{\Xi}_2$, $\bar{\Xi}_2^T K_j^T \bar{\Xi}_1^T B_i^T P$ 替代 $\beta P B_i \bar{\Xi}_1 K_j$, $\beta K_j^T \bar{\Xi}_1^T B_i^T P$.

在 (33) 式左右两边分别乘以 $\text{diag}\{\underbrace{X, X, \dots, X}_7, I, X, \dots, X, I\}$, 并且令

$$\text{diag}\{X, X, X, X\} N_{ij} \text{diag}\{X, X, X, X\} = \hat{N}_{ij}, \quad \text{diag}\{X, X, X, X\} M_{ij} \text{diag}\{X, X, X, X\} = \hat{M}_{ij},$$

$K_j X = Y_j$, 我们可以得到式 (29) 和 (30).

4 仿真例子

考虑系统 (6) 具有如下参数

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0.1481 & 0 & 0.05 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.05 & 0 & -0.05 & -0.007 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0.1125 & 0 & 0.05 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.05 & 0 & -0.05 & -0.007 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = B_2 = [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T.$$

为了验证我们所提方法的有效性和优越性，我们分下面 4 种情况来讨论。

情况 1 当不考虑执行器和传感器到控制器的随机故障，此时 $\alpha_i = 1, \delta_i = 0, \beta_i = 1, \gamma_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, 4$). 取 $\rho_1 = \rho_2 = 1, d_1 = 1, d_2 = 5$, 则由定理 2, 我们可以得到下面的控制器增益

$$\begin{cases} K_1 = [0.1246 \ -0.2521 \ -0.1457 \ -0.7412], \\ K_2 = [0.1342 \ -0.2426 \ -0.1387 \ -0.7519]. \end{cases} \quad (34)$$

情况 2 当只考虑传感器随机故障时，也即 $\beta_i = 1, \gamma_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, 4$). 取 $\alpha_1 = 0.6, \delta_1 = 0.1, \rho_1 = \rho_2 = 1, d_1 = 1, d_2 = 3$, 则由定理 2, 我们可以得到下面的控制器增益

$$\begin{cases} K_1 = [-0.0131 \ -0.2131 \ -0.1642 \ -0.5157], \\ K_2 = [-0.0272 \ -0.2134 \ -0.1214 \ -0.5439]. \end{cases} \quad (35)$$

情况 3 当只考虑执行器的随机故障时，也即 $\alpha_i = 1, \delta_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, 4$). 取 $[\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4] = [0.9, 0.8, 0.7, 0.9], [\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4] = [0.10, 0.15, 0.20, 0.25], \rho_1 = \rho_2 = 1, d_1 = 1, d_2 = 5$, 则由定理 2, 我们可以得到下面的控制器增益

$$\begin{cases} K_1 = [-0.0135 \ -0.2213 \ -0.1356 \ -0.4416], \\ K_2 = [-0.0124 \ -0.2314 \ -0.1320 \ -0.4216]. \end{cases} \quad (36)$$

情况 4 当考虑从控制器到执行器和传感器到控制器的随机故障时，取 $\alpha_1 = 0.9, \delta_1 = 0.10, [\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4] = [0.6, 0.7, 0.8, 0.9], [\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4] = [0.05, 0.15, 0.25, 0.35], \rho_1 = \rho_2 = 1, d_1 = 1, d_2 = 5$, 则由定理 2, 我们可以得到下面的控制器增益

$$\begin{cases} K_1 = [0.1328 \ -0.2212 \ -0.1438 \ -0.4219], \\ K_2 = [0.1347 \ -0.2615 \ -0.1759 \ -0.4317]. \end{cases} \quad (37)$$

当初始状态 $x_0 = [-0.5 \ -0.2 \ 0.2 \ 0.5]^T, h_1 = \sin^2(k), h_2 = \cos^2(k)$, 我们可得系统仿真曲线图 2-5.

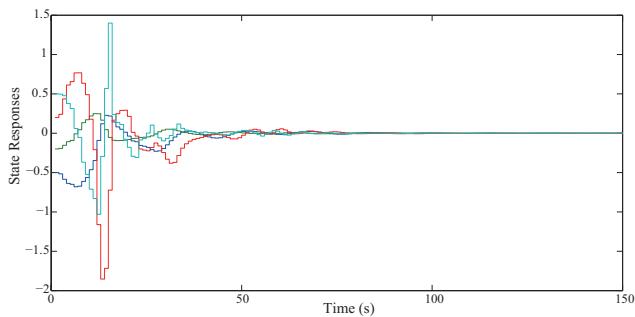


图 2 情形 1 时系统状态响应曲线

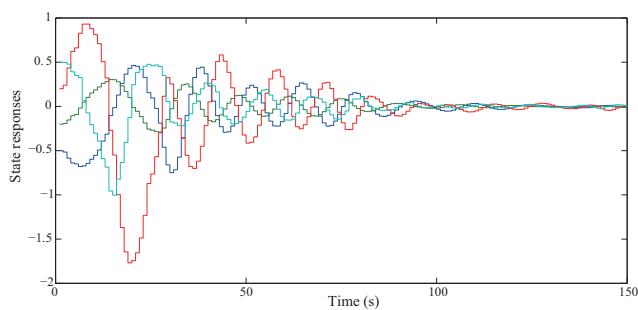


图 3 情形 2 时系统状态响应曲线

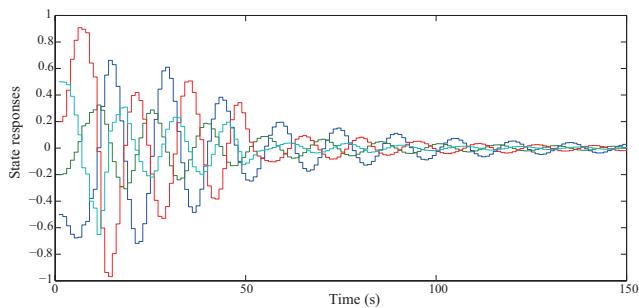


图 4 情形 3 时系统状态响应曲线

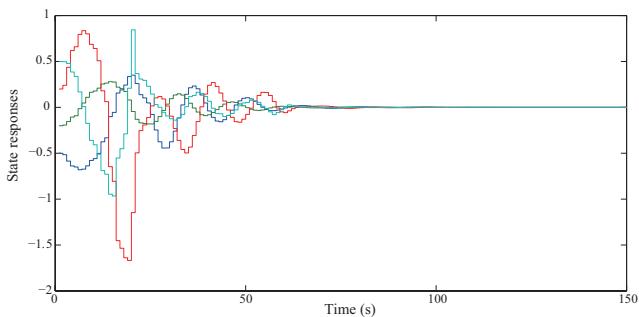


图 5 情形 4 时系统状态响应曲线

5 结 论

本文研究了一类带有传感器和执行器概率失真的 T-S 模糊离散系统的可靠性控制问题，其中传感器和执行器故障是随机出现的。考虑每个传感器和执行器的随机概率性失真，建立了一个更符合实际的新的数学模型。通过使用李亚普诺夫泛函方法和线性矩阵不等式技术，得到研究的 T-S 模糊离散系统稳定和镇定的充分性条件。最后，通过数值算例验证本文给出方法的有效性和有用性。

参 考 文 献

- [1] Takagi T, Sugeno M. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 1985, **15**(1): 116–132.
- [2] Guan X, Chen C. Delay-dependent guaranteed cost control for T-S fuzzy systems with time delays. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2004, **12**(2): 236–249.
- [3] Peng C, Yue D, Tian Y. New approach on robust delay-dependent H_∞ control for uncertain T-S fuzzy systems with interval time-varying delay. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2009, **17**(4): 890–900.
- [4] Yue D, Lam J, Ho D W C. Reliable H_∞ control of uncertain descriptor systems with multiple time delays. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2003, **15**: 557–564.
- [5] Yang G, Wang J, Soh Y. Reliable H_∞ controller design for linear systems. *Automatica*, 2001, **37**(5): 717–725.
- [6] Zhang D, Su H, Pan S, Chu J, Wang Z. LMI approach to reliable guaranteed cost control with multiple criteria constraints: The actuator faults case. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2009, **19**(8): 884–899.
- [7] Gao Z, Breikin T, Wang H. Reliable observer-based control against sensor failures for systems with time delays in both state and input. *IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics – Part A: Systems and Humans*, 2008, **38**(5): 1018–1029.
- [8] Tellili A, Abdelkrim M N, Benrejeb M. Reliable H_∞ control of multiple time scales singularly perturbed systems with sensor failure. *International Journal of Control*, 2007, **80**(5): 659–665.
- [9] Tian E, Yue D, Peng C. Reliable control for networked control systems with probabilistic sensors and actuators faults. *IET Control Theory and Applications*, 2010, **4**(8): 1478–1488.
- [10] Tian E, Peng C. Delay-dependent stability analysis and synthesis of uncertain T-S fuzzy systems with time-varying delay. *Fuzzy Sets and Systems*, 2006, **157**(4): 544–559.
- [11] Lin C, Wang Q, Lee T, He Y. Fuzzy weighting-dependent approach to H_∞ filter design for time-delay fuzzy systems. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2007, **55**(6): 2746–2751.
- [12] Wang Z, Ho D, Liu Y, Liu X. Robust H_∞ control for a class of nonlinear discrete time-delay stochastic systems with missing measurements. *Automatica*, 2009, **45**(3): 684–691.
- [13] He X, Wang Z, Zhou D. Robust H_∞ filtering for time-delay systems with probabilistic sensor faults. *IEEE Transactions on Signal Processing Letters*, 2009, **16**(5): 442–445.
- [14] Wei G, Wang Z, Shu H. Robust filtering with stochastic nonlinearities and multiple missing measurements. *Automatica*, 2009, **45**(3): 836–841.
- [15] Jiang X, Han Q, Yu X. Stability criteria for linear discrete-time systems with interval-like time-varying delay. American Control Conference, 2005, 2817–2822.
- [16] Wang T, Xie L, de Souza C. Robust control of a class of uncertain nonlinear systems. *Systems & Control Letters*, 1992, **19**(2): 139–149.
- [17] Tian E, Yue D, Zhang Y. Delay-dependent robust H_∞ control for T-S fuzzy system with interval time-varying delay. *Fuzzy Sets and Systems*, 2009, **160**(12): 1708–1719.